第8講　三角関数(1)

1 [1]　$\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\sin 4$ を小さい順に並べよ．ただし，角度は弧度法（ラジアン）である．

[2]　$\alpha+\beta=\frac{4}{3}\pi$　……①，$\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　……②　のとき $\cos\alpha+\cos\beta$ の値を求めよ．

< Note >

2 以下の ア ～ エ にあてはまる数字をそれぞれ答えよ．

［1］ 座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が媒介変数 θ を用いて

$$x=-\sin\theta+2\cos\theta,\ \ y=2\sin\theta+3\cos\theta$$

と表されているとする．このとき，原点を O とすると

$$\mathrm{OP}^2=\boxed{\text{ア}}\sqrt{2}\sin\left(\boxed{\text{イ}}\theta+\frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}\right)+\boxed{\text{エ}}$$

が成り立つ．

［2］ $\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}\left(\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|+\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|\right)$ であるから，

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のときは

$$\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}=\boxed{\text{イ}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$$

である．

＜ Note ＞

3　$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，次の方程式を解け．

$$\cos 4\theta - 2\cos 3\theta + \cos 2\theta = 0$$

＜ Note ＞

第8講　三角関数(1)

(1) θの関数$\sin\theta\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$を，定数$a$，$b$を用いて$a\sin^3\theta+b\sin\theta$と表したとき，$(a,\ b)=\left(\boxed{ア},\ -\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\right)$である．

(2) $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$とするとき，方程式$1+\cos2\theta+\cos4\theta=0$の解は$\theta=\pm\dfrac{\pi}{\boxed{エ}}$，$\pm\dfrac{\pi}{\boxed{オ}}$である．（ただし，$\boxed{エ}<\boxed{オ}$とする．）

＜ Note ＞

第８講　三角関数(1)

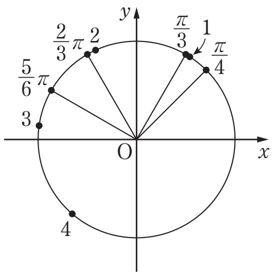
1 ［1］ sin1，sin2，sin3，sin4 を小さい順に並べよ．ただし，角度は弧度法（ラジアン）である．

π(rad)＝180° より

$1=\dfrac{180}{\pi}\fallingdotseq 57.3°$　　$2=\dfrac{360}{\pi}\fallingdotseq 114.6°$

$3=\dfrac{540}{\pi}\fallingdotseq 171.9°$　　$4=\dfrac{720}{\pi}\fallingdotseq 229.2°$

よって，小さい順に　**sin4，sin3，sin1，sin2**



1 ［2］ $\alpha+\beta=\dfrac{4}{3}\pi$ ……①，$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$ ……② のとき $\cos\alpha+\cos\beta$ の値を求めよ．

(①＋②)÷2 より　$\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\pi}{4}$

(①－②)÷2 より　$\beta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{4}$

$$\cos\alpha+\cos\beta=\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\cos\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

2 以下の［ア］～［エ］にあてはまる数字をそれぞれ答えよ．

［1］ 座標平面上の点 P(x, y) が媒介変数 θ を用いて

$x=-\sin\theta+2\cos\theta$，$y=2\sin\theta+3\cos\theta$

と表されているとする．このとき，原点を O とすると

$OP^2=$［ア］$\sqrt{2}\sin\left(［イ］\theta+\dfrac{\pi}{［ウ］}\right)+$［エ］ が成り立つ．

$$OP^2=x^2+y^2$$
$$=(-\sin\theta+2\cos\theta)^2+(2\sin\theta+3\cos\theta)^2$$
$$=5\sin^2\theta+8\sin\theta\cos\theta+13\cos^2\theta$$
$$=5\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}+8\cdot\frac{\sin2\theta}{2}+13\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}$$
$$=4\sin2\theta+4\cos2\theta+9$$
$$=4\sqrt{2}\left(\sin2\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos2\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+9$$
$$=\boldsymbol{4}\sqrt{2}\sin\left(\boldsymbol{2}\theta+\frac{\pi}{\boldsymbol{4}}\right)+\boldsymbol{9}$$

2 ［2］ $\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}\left(\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|+\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right)$ であるから，

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のときは

$\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}=\boxed{\text{イ}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$ である．

$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$ より　$\sqrt{1+\cos\theta}=\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$

$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$ より　$\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$　したがって

$$\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{\mathbf{2}}\left(\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|+\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right)$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　$0\leqq\frac{\theta}{2}\leqq\frac{\pi}{2}$　より　$\cos\frac{\theta}{2}\geqq0,\ \sin\frac{\theta}{2}\geqq0$

よって　$\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{\mathbf{4}}\right)$$

3 $0\leqq\theta<\pi$ のとき，次の方程式を解け．

$$\cos4\theta-2\cos3\theta+\cos2\theta=0$$

$\cos4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$

よって　$\cos4\theta-2\cos3\theta+\cos2\theta=0$　より

$8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1-2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+2\cos^2\theta-1=0$

$4\cos^4\theta-4\cos^3\theta-3\cos^2\theta+3\cos\theta=0$

$\cos\theta(4\cos^3\theta-4\cos^2\theta-3\cos\theta+3)=0$

$\cos\theta(\cos\theta-1)(4\cos^2\theta-3)=0$

$\cos\theta=0,\ 1,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$0\leqq\theta<\pi$ より　$\boldsymbol{\theta=0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi}$

第８講　三角関数(1)

(1)　θ の関数 $\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ を，定数 a，b を用いて $a\sin^3\theta+b\sin\theta$ と表したとき，$(a,\ b)=\left(\boxed{ア},\ -\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\right)$ である．

(2)　$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ とするとき，方程式 $1+\cos2\theta+\cos4\theta=0$ の解は $\theta=\pm\frac{\pi}{\boxed{エ}}$，$\pm\frac{\pi}{\boxed{オ}}$ である．（ただし，$\boxed{エ}<\boxed{オ}$ とする．）

(1)　$\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\theta\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{4}\sin\theta(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)$

$=\frac{1}{4}\sin\theta(\sin^2\theta-3\cos^2\theta)=\frac{1}{4}\sin\theta(4\sin^2\theta-3)=\sin^3\theta-\frac{3}{4}\sin\theta$

よって　$(a,\ b)=\left(\mathbf{1},\ -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)$

【別解】　$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$　より

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\left(\cos2\theta-\cos\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}\left(-2\sin^2\theta+\frac{3}{2}\right)$

したがって　(与式)$=\sin^3\theta-\frac{3}{4}\sin\theta$　より　$(a,\ b)=\left(\mathbf{1},\ -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)$

(2)　$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$

$\cos4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

$1+\cos2\theta+\cos4\theta=0$　より　$1+2\cos^2\theta-1+8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1=0$

$8\cos^4\theta-6\cos^2\theta+1=0$　　$(4\cos^2\theta-1)(2\cos^2\theta-1)=0$

$\cos\theta=\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$　　$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$　より　$\theta=\pm\frac{\pi}{\mathbf{3}},\ \pm\frac{\pi}{\mathbf{4}}$

【別解】　$\cos4\theta=2\cos^2 2\theta-1$

$1+\cos2\theta+\cos4\theta=0$　より　$1+\cos2\theta+2\cos^2 2\theta-1=0$

$\cos2\theta(2\cos2\theta+1)=0$

$\cos2\theta=0,\ -\frac{1}{2}$　　$-\pi\leqq2\theta<\pi$ より　$2\theta=\pm\frac{2}{3}\pi,\ \pm\frac{\pi}{2}$　　$\theta=\pm\frac{\pi}{\mathbf{3}},\ \pm\frac{\pi}{\mathbf{4}}$